抽象向量空间为什么好

—— 由几个例子管窥

蒋剑剑 （宁德师范学院） E-mail: j.j.jiang@foxmail.com

缘起

- 学生一学到抽象向量空间就不行了，畏难不前
- 概念化抽象思维缺乏训练、应试思维根深蒂固
- 用典型例子增进认知、体会抽象向量空间之妙

热身　　　（源自 Putnam 2003 B1）

1、（5 分）设$\mathbb{R}[x]$的子空间V包含$\{\ 1+xy+x^2y^2\ |\ y\in\mathbb{R}\ \}$，求$\dim V$的最小值.

2、（4 分）设$f(x),g(x),a(x),b(x)\in\mathbb{R}[x]$. 试问$\{\ f(x)a(y)+g(x)b(y)\ |\ y\in\mathbb{R}\ \}\subseteq\mathbb{R}[x]$至多能张成几维子空间？

3、（6 分）判断并论证：是否存在实系数多项式$f(x),g(x),a(x),b(x)$使下式恒成立？

$$1+xy+x^2y^2=f(x)a(y)+g(x)b(y).$$

此外请简要谈谈：本题对你有何启发？

感悟

- 维数是向量空间的完全不变量
- 欲证“不可能”，经常用“不变量”
- 抽象思维的一种方式——提炼

进阶：朱世杰招差垛积术（由林开亮引发）

【判断题】

令 $\mathrm{F}[x]_n=\{f(x)\in \mathrm{F}[x]\mid \deg f(x)<n\}$，则 $\mathrm{F}[x]_n$ 按多项式加法和数乘构成向量空间?

【判断题】

$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 是 $\mathrm{F}[x]_n$ 的一组基?

【判断题】

对任意 $f(x)\in \mathrm{F}[x]_n$，令 $(\Delta f)(x)=f(x+1)-f(x)$，称为 $f(x)$ 的差分. 我们有朱世杰公式

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n-1}(\Delta^k f)(0)\binom{x}{k}$$，其中 $\binom{x}{k}=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ 是 k 次多项式.

由此可推断 $1,\binom{x}{1},\binom{x}{2},\cdots,\binom{x}{n-1}$ 也是 $\mathrm{F}[x]_n$ 的一组基?

朱世杰公式的直接证明：算子法

考虑平移算子 $T: \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x],\ f(x) \mapsto f(x+1)$.

则差分算子 $\Delta = T - 1$，于是 $f(n) = (T^n f)(0)$.

由二项式定理得 $T^n f = (1+\Delta)^n f = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f$.

即 $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k f\right)(0) \binom{n}{k}$. 将$n$换成$x$立得公式.

朱世杰招差垛积术（续）

【判断题】

设 k 为正整数，则由杨辉恒等式 $\binom{x}{k}=\binom{x+1}{k+1}-\binom{x}{k+1}=\left[\Delta\binom{x}{k+1}\right](x)$ 可得 $\sum_{x=1}^{m}\binom{x}{k}=\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{m}{k}=\binom{m+1}{k+1}$？

【填空题】

在 $\mathrm{F}[x]_5$ 中，设 x^4 相对于基 $1,\binom{x}{1},\binom{x}{2},\binom{x}{3},\binom{x}{4}$ 的坐标为 $(0,a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$，则 a=____, b=____, c=____, d=____.

据此可算出

$$\sum_{x=1}^{m}x^4=1^4+2^4+\cdots+m^4=a\binom{m+1}{2}+b\binom{m+1}{3}+c\binom{m+1}{4}+d\binom{m+1}{5}.$$

> 引言：我国元代数学家朱世杰在其名著《四元玉鉴》中提出了任意高阶等差数列的求和法，即招差术和垛积术．这是多项式函数之微积分在离散情形的恰当类比，代表了中国古典数学的一座高峰，也是世界数学史上的伟大成就．

朱世杰的方法可从以下推导中窥得：

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= 1+2+3+\cdots+n = \frac{1\cdot(2-0)}{2}+\frac{2\cdot(3-1)}{2}+\frac{3\cdot(4-2)}{2}+\cdots+\frac{n[(n+1)-(n-1)]}{2}\\
&= \frac{1}{2}[1\cdot 2+2\cdot 3-1\cdot 2+3\cdot 4-2\cdot 3+\cdots+n(n+1)-(n-1)n] = \frac{n(n+1)}{2},\\
S_2(n) &= 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = 1\cdot(2-1)+2\cdot(3-1)+3\cdot(4-1)+\cdots+n(n+1-1)\\
&= [1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)]-(1+2+3+\cdots+n)\\
&= \left\{\frac{1\cdot 2\cdot(3-0)}{3}+\frac{2\cdot 3\cdot(4-1)}{3}+\frac{3\cdot 4\cdot(5-2)}{3}+\cdots+\frac{n(n+1)[(n+2)-(n-1)]}{3}\right\}-\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{1}{3}[1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3+3\cdot 4\cdot 5-2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]-\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\
S_3(n) &= 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = ?
\end{aligned}
$$

如果你领悟了朱世杰的方法（即招差求和），那么一定可以自行算出 $S_3(n), S_4(n), S_5(n)$ 等. 建议进一步阅读以下资料：

1. 杨辉三角与数列求和 I
2. 从高斯算1+2+3+... +100谈起
3. 从“如像招数”到“杨辉三角”
4. 微積分之前奏（或變奏）：高階等差數列的求和
5. 从“杨辉三角”到“代微积拾级”

感悟

- 向量空间是一切线性关系的总和
- 对各种问题应当寻找最适宜的基
- 抽象思维的一种方式——形式化

升级：“特征向量”的自然引出（再施算子法）

一个自然而迫切的问题是如何求出斐波那契数列的通项公式. 从递推关系出发，用线性变换的视角看待它，你就会发现一种解法. 首先，全体数列形成的集合上可以自然地定义数乘和加法，成为向量空间. 若令 $(Tf)_n = f_{n+1}$，则 T 是数列空间上的一个线性变换. 用 I 表示数列空间上的恒等变换，则斐波那契数列的递推关系其实就是

$$0 = (T^2 - T - I)f = (T - aI)(T - bI)f, \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

要想数列 $\{f_n\}$ 满足上式，只需令它满足 $(T-aI)f=0$ 或 $(T-bI)f=0$，也即 $Tf=af$ 或 $Tf=bf$. 容易解这样的方程，比如对 $f_{n+1}=(Tf)_n=af_n$，可得解 $f_n=a^n$. 类似可知 $f_n=b^n$ 是 $Tf=bf$ 的一个解. 由于 T^2-T-I 是线性变换，故以上得到的解其实属于这个变换的核空间，从而这些解的线性组合仍为 $(T^2-T-I)f=0$ 的解. 因此可设斐波那契数列的通项形如 $k_1a^n+k_2b^n$，再由 $f_1=k_1a+k_2b=1$ 及 $f_2=k_1a^2+k_2b^2=1$ 解得 $k_1=-k_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 于是斐波那契数列的通项公式为

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

从以上求解过程可以看出，成功的关键在于把问题转化成了求解形如 $Tf=af$ 的简单方程. 这就引出了特征值和特征向量的概念：$Tf=af$ 的非零解称为特征向量，而 a 称为特征值. 接下来请认真观看视频，学习特征值与特征向量的精确定义及基本知识.

延伸阅读：解常係數線性微分方程和遞推關係的新方法 - 秦九韶和亥維賽的遺產

感悟

- 线性的问题都暗含一个线性变换
- 算子不能脱离其演算体系去把握
- 抽象思维的一种方式——体系化

高潮：用线性代数证明**代数基本定理**

- 介值性：奇数次（即2是次数的0重因数）实系数多项式皆有根，正数可开方.
- 归约：对$f(x) \in \mathbb{C}[x]$，方程$f(x)=0$等价于$|f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)} = 0$；只需证**任何（首一）实系数多项式有（复数）根**.
- 对多项式次数中因数2的重数归纳，而归纳的初始条件已然成立（介值性）.
- 首一多项式皆为友矩阵之特征多项式（次数=阶数），只需**证特征向量存在**.
- 对n阶实方阵P，视作n元实二次型之线性替换，诱导出n阶实对称矩阵空间（$\frac{n(n+1)}{2}$维；即2的重数降低）上的线性变换$A \mapsto P^{\mathrm{T}}AP$；希望**从后者的特征向量构造出$P$的特征向量**.

用线性代数证明**代数基本定理**（续）

- 由$P^{\mathrm{T}}AP = \mu A$还搞不出$PX = \lambda X$. 只因线性替换是左乘算子$L(A) = P^{\mathrm{T}}A$与右乘算子$R(A) = AP$之积（复合）$LR = RL$.
- 单靠积无法解出L, R，那就再考虑和$(L + R)(A) = P^{\mathrm{T}}A + AP$. 它是合同变换 “在I处沿方向$P$的切映射”：$\frac{(\mathrm{I}+\epsilon P)^{\mathrm{T}}A(\mathrm{I}+\epsilon P)-A}{\epsilon} \to P^{\mathrm{T}}A + AP \quad (\epsilon \to 0)$.
- 因LR与$L + R$交换，**存在$\boldsymbol{A}$使$(\boldsymbol{LR})(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\mu A}$及$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\eta A}$**. 据中学二次方程经验有$(\lambda - L)(\lambda - R)(A) = (\lambda^2 - \eta\lambda + \mu)A = (\lambda - a)(\lambda - b)A$. 其中$a, b \in \mathbb{C}$是二次多项式$\lambda^2 - \eta\lambda + \mu \in \mathbb{C}[\lambda]$的两根.
- 于是$a - L$与$a - R$中至少有个不可逆，不管哪个都能**得出 $|\boldsymbol{a}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{P}| = \mathbf{0}$.**

感悟

- 抽象向量空间概念普适而灵活
- 向量空间之间有着密切的联系
- 抽象思维的一种方式——类比

抽象向量空间为什么好
—— 由几个例子管窥

Thanks for attention.

蒋剑剑（宁德师范学院）Email: j.j.jiang@foxmail.com